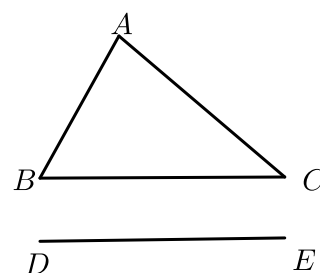


第2讲全等三角形进阶

一、全等三角形存在性

栗子1

1. 如图， $\triangle ABC$ 是不等边三角形， $DE = BC$ ，以 D 、 E 为两个顶点作位置不同的三角形，使所作三角形与 $\triangle ABC$ 全等，这样的三角形最多可以画出（ ）个。



A. 4

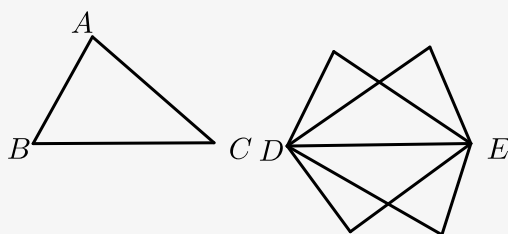
B. 6

C. 8

D. 10

【答案】A

【解析】如图：

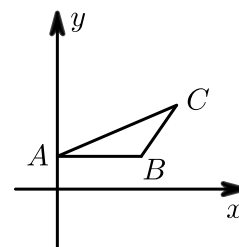


这样的三角形最多可以画出4个。

故选A。

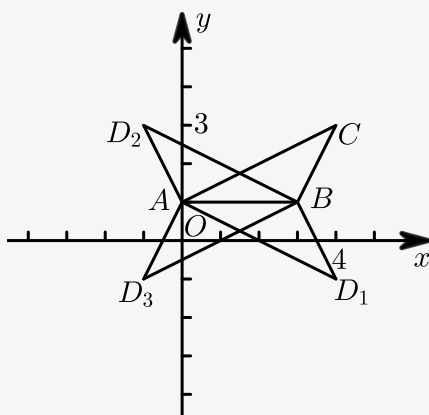
【标注】【知识点】全等三角形存在性

2. $\triangle ABC$ 中，点 A 、 B 、 C 坐标为 $(0,1)$ ， $(3,1)$ ， $(4,3)$ ，如果要使 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ABC$ 全等，那么点 D 的坐标是_____。



【答案】 $(4, -1)$ 或 $(-1, 3)$ 或 $(-1, -1)$

【解析】 符合题意的有3个，如图，



$\therefore$ 点 A 、 B 、 C 坐标为 $(0, 1)$ ， $(3, 1)$ ， $(4, 3)$ ，

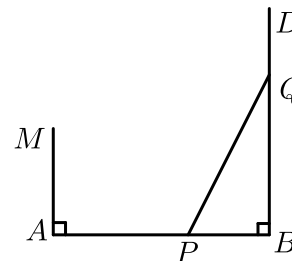
$\therefore D_1$ 的坐标是 $(4, -1)$ ， D_2 的坐标是 $(-1, 3)$ ， D_3 的坐标是 $(-1, -1)$ 。

故答案为： $(4, -1)$ 或 $(-1, 3)$ 或 $(-1, -1)$ 。

【标注】 【知识点】 全等三角形存在性

栗子2

3. 如图，已知 $AB = 12$ 米， $MA \perp AB$ 于 A ， $MA = 6$ 米，射线 $BD \perp AB$ 于 B ， P 点从 B 向 A 运动，每秒走 1 米， Q 点从 B 向 D 运动，每秒走 2 米， P 、 Q 同时从 B 出发，则出发 ____ 秒后，在线段 MA 上有一点 C ，使 $\triangle CAP$ 与 $\triangle PBQ$ 全等。



【答案】 4

【解析】 当 $\triangle APC \cong \triangle BQP$ 时， $AP = BQ$ ，即 $12 - x = 2x$ ，

解得： $x = 4$ ，

当 $\triangle APC \cong \triangle BQP$ 时， $AP = BP = \frac{1}{2}AB = 6$ 米，

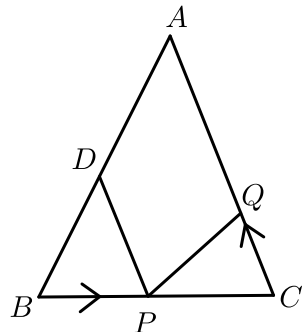
此时所用时间为6秒， $AC = BQ = 12$ 米，不合题意，舍去，

综上，出发4秒后，在线段MA上有一点C，使 $\triangle CAP$ 与 $\triangle PBQ$ 全等。

故答案为：4秒。

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

4. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 12$ 厘米， $\angle B = \angle C$ ， $BC = 8$ 厘米，点D为AB的中点，如果点P在线段BC上以2厘米/秒的速度由B点向C点运动，同时点Q在线段CA上由C点向A点运动，当一个点停止运动时，另一个点也随之停止运动，当点Q的运动速度为 _____ 厘米/秒时，能够在某一时刻使 $\triangle BPD$ 与 $\triangle CQP$ 全等。



【答案】 3或2

【解析】 ①当 $BD = PC$ 时， $\triangle BPD \cong \triangle CQP$ ，

$\because$ 点D为AB中点，

$$\therefore BD = \frac{1}{2}AB = 6\text{cm}，$$

$$\therefore BD = PC，$$

$$\therefore BP = 8 - 6 = 2(\text{cm})，$$

$\because$ 点P在线段BC上以2厘米/秒的速度，由B向C运动，

$$\therefore t = 1\text{s}，$$

$$\therefore \triangle DBP \cong \triangle PCQ，$$

$$\therefore PB = CQ = 2\text{cm/s}。$$

$$\therefore v = \frac{2}{1} = 2\text{cm/s}。$$

②当 $BD = CQ$ 时， $\triangle BDP \cong \triangle QCP$ ，

$$\therefore BD = 6\text{cm}，PB = PC，$$

$$\therefore CQ = 6\text{cm}，$$

$$\therefore BC = 8\text{cm} ,$$

$$\therefore BP = 4\text{cm} ,$$

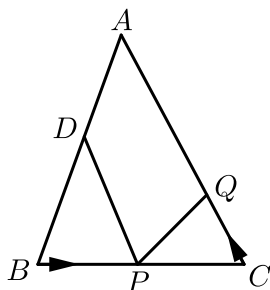
$$\therefore \text{运动时间} \frac{4}{2} = 2 (\text{s}) ,$$

$$\therefore v = \frac{6}{2} = 3\text{cm/s} .$$

【标注】【知识点】全等三角形存在性

独步天下1

5. 如图所示，已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = \angle C$ ， $AB = AC = 10$ 厘米， $BC = 8$ 厘米，点 D 为 AB 的中点．



(1) 如果点 P 在线段 BC 上以3厘米/秒的速度由 B 点向 C 点运动，同时，点 Q 在线段 CA 上由 C 点向 A 点运动．

- ① 若点 Q 的运动速度与点 P 的运动速度相等，经过1秒后， $\triangle BPD$ 与 $\triangle CQP$ 是否全等，请说明理由．
- ② 若点 Q 的运动速度与点 P 的运动速度不相等，当点 Q 的运动速度为多少时，能够使 $\triangle BPD$ 与 $\triangle CQP$ 全等？

(2) 若点 Q 以②中的运动速度从点 C 出发，点 P 以原来的运动速度从点 B 同时出发，都逆时针沿 $\triangle ABC$ 三边运动，求经过多长时间点 P 与点 Q 第一次在 $\triangle ABC$ 的哪条边上相遇？

【答案】(1) ① 全等，证明见解析．

② 当点 Q 的运动速度为 $\frac{15}{4}$ cm/s时，能够使 $\triangle BPD$ 与 $\triangle CQP$ 全等．

(2) 经过 $\frac{80}{3}$ 秒点 P 和点 Q 第一次在边 AB 上相遇．

【解析】(1) ① 当点 Q 的运动速度为 $\frac{15}{4}$ cm/s时，能够使 $\triangle BPD$ 与 $\triangle CQP$ 全等．

$\triangle BPD$ 与 $\triangle CQP$ 全等．

理由如下：

若 Q 、 P 两点的运动速度相等，则点 Q 的运动速度为3 cm/s，

$\therefore$ 经第1s后， $BP = 3\text{cm}$ ， $PC = BC - BP = 5\text{cm} = BD$ ， $CQ = 3\text{cm} = BP$ ，

在 $\triangle DBP$ 和 $\triangle PCQ$ 中，

$$\begin{cases} BP = CQ \\ \angle B = \angle C \\ BD = PC \end{cases}$$

$\therefore \triangle DBP \cong \triangle PCQ$ (SAS) ;

② 若Q、P两点的运动速度不相等，要使 $\triangle BPD$ 与 $\triangle CQP$ 全等，则 $BP = PC = 4\text{cm}$

, $CQ = BD = 5\text{cm}$,

$\therefore$ 点P的运动速度为 3cm/s ,

$\therefore$ 点P的运动时间为 $4 \div 3 = \frac{4}{3}\text{s}$,

$\therefore$ 点P与点Q同时出发，

$\therefore$ 点Q的运动时间 $= \frac{4}{3}\text{s}$,

$\therefore$ 点Q的运动速度为 $5 \div \frac{4}{3} = \frac{15}{4}\text{cm/s}$.

即当点Q的运动速度为 $\frac{15}{4}\text{cm/s}$ 时，能够使 $\triangle BPD$ 与 $\triangle CQP$ 全等.

(2) 设经过 x 秒后点P与点Q第一次相遇，

由题意，得： $\frac{15}{4}x = 3x + 2 \times 10$,

$\therefore x = \frac{80}{3}$ (秒) .

$\therefore$ 点P共运动了 $\frac{80}{3} \times 3 = 80\text{cm}$.

$\therefore 80 = 2 \times (10 + 10 + 8) + 24$,

$\therefore$ 点P、Q在AB边上相遇.

$\therefore$ 经过 $\frac{80}{3}$ 秒点P和点Q第一次在边AB上相遇.

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

【知识点】全等三角形实际生活中的应用

【知识点】SAS

【知识点】一元一次方程的行程问题-相遇问题

【能力】推理论证能力

二、二次全等

二次全等：

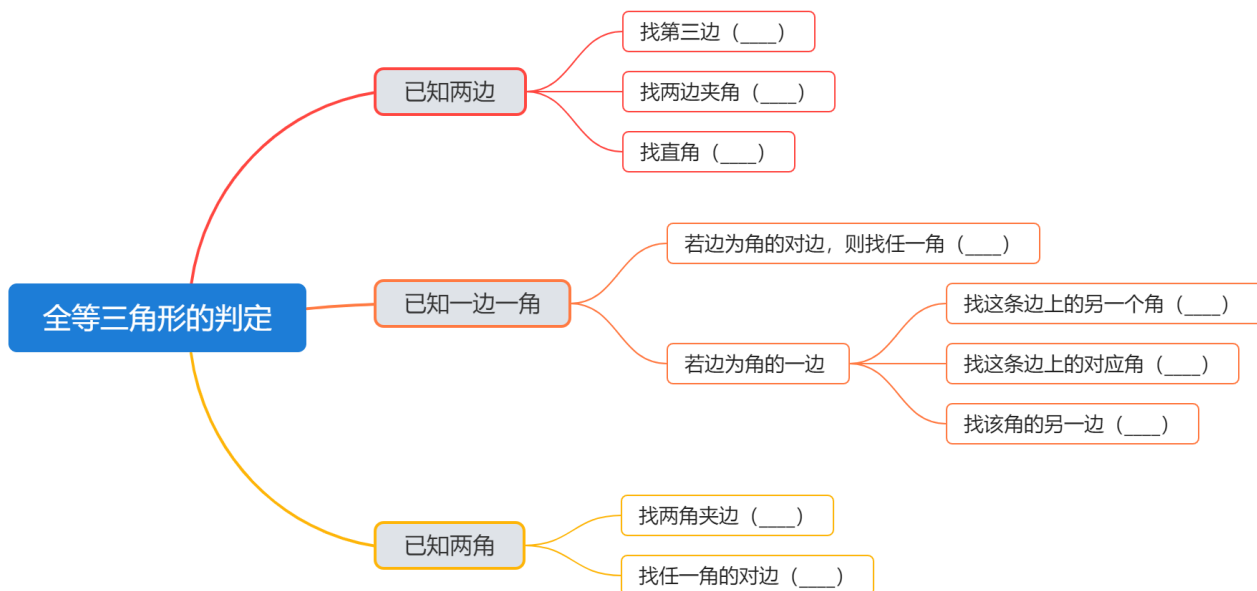
指的是要证的结论所对应的两个三角形无法直接由已知推得，需要借助其他全等的三角形得到一些信息才能做出来.

所以做这种题要特别注意已知的相等角或相等边在哪些三角形里，而要证的相等边在哪些三角形里.

【解题步骤】

①解决二次全等问题的标准流程，找到一组搭桥的全等形，完成证明，从而补充缺少的条件，实现终极证明.

②解答时，要把这个过程反过来写，先证明搭桥全等形。



【备注】

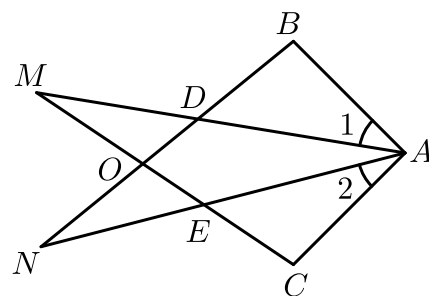
已知两边 SS $\begin{cases} \text{找另一边} \rightarrow SSS \\ \text{找夹角} \rightarrow SAS \\ \text{找直角} \rightarrow HL \end{cases}$

已知一边一角 SA $\begin{cases} \text{边为角的对边} \rightarrow \text{找任一角} \rightarrow AAS \\ \text{边是角的一条边} \begin{cases} \text{找这条边上的另一个角} \rightarrow ASA \\ \text{找这条边上的对应角} \rightarrow AAS \\ \text{找该角的另一边} \rightarrow SAS \end{cases} \end{cases}$

已知两角 AA $\begin{cases} \text{找两角的夹边} \rightarrow ASA \\ \text{找任意一边} \rightarrow AAS \end{cases}$

栗子3

6. 已知 $\triangle ABN$ 和 $\triangle ACM$ 位置如图所示， $AB = AC$ ， $AD = AE$ ， $\angle 1 = \angle 2$ 。



(1) 求证： $BD = CE$ 。

(2) 求证： $\angle M = \angle N$ 。

【答案】 (1) 证明见解析。

(2) 证明见解析。

【解析】 (1) 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中，

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle 1 = \angle 2, \\ AD = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE \text{ (SAS)},$$

$$\therefore BD = CE.$$

(2) $\because \angle 1 = \angle 2,$

$$\therefore \angle 1 + \angle DAE = \angle 2 + \angle DAE,$$

即 $\angle BAN = \angle CAM,$

由(1)得: $\triangle ABD \cong \triangle ACE,$

$$\therefore \angle B = \angle C,$$

在 $\triangle ACM$ 和 $\triangle ABN$ 中,

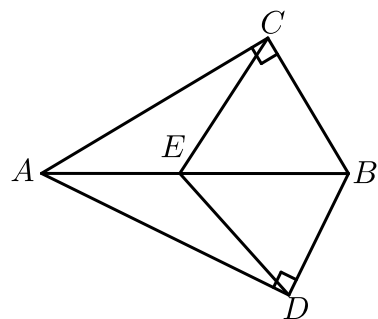
$$\begin{cases} \angle C = \angle B \\ AC = AB \\ \angle CAM = \angle BAN \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ACM \cong \triangle ABN \text{ (ASA)},$$

$$\therefore \angle M = \angle N.$$

【标注】【知识点】ASA

7. 如图, $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$, $AC = AD$, E 是 AB 上的一点. 求证: $CE = DE$.



【答案】证明见解析.

【解析】 $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中,

$$\begin{cases} AB = AB \\ AC = AD \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABC \cong \text{Rt}\triangle ABD \text{ (HL)},$$

$$\therefore BC = BD, \angle CBA = \angle DBA,$$

在 $\triangle CBE$ 和 $\triangle DBE$ 中,

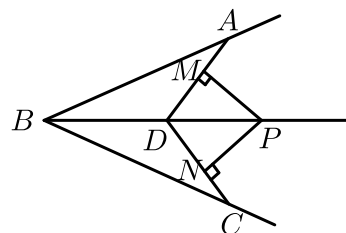
$$\begin{cases} BE = BE \\ \angle CBE = \angle DBE, \\ BC = BD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle CBE \cong \triangle DBE \text{ (SAS)},$$

$$\therefore CE = DE.$$

【标注】【知识点】全等三角形之二次全等

8. 如图， BD 是 $\angle ABC$ 的平分线， $AB = BC$ ，点 P 在 BD 上， $PM \perp AD$ ， $PN \perp CD$ ，垂足分别为 M ， N ．求证： $PM = PN$ ．



【答案】证明见解析．

【解析】 $\because BD$ 为 $\angle ABC$ 的平分线，

$$\therefore \angle ABD = \angle CBD,$$

$$\text{在} \triangle ABD \text{和} \triangle CBD \text{中}, \begin{cases} AB = BC \\ \angle ABD = \angle CBD \\ BD = BD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CBD (\text{SAS}),$$

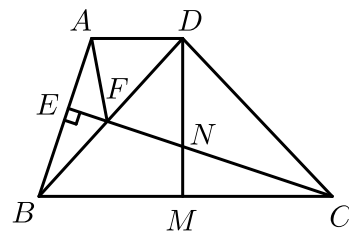
$$\therefore \angle ADB = \angle CDB,$$

$$\because \text{点} P \text{在} BD \text{上}, PM \perp AD, PN \perp CD,$$

$$\therefore PM = PN.$$

【标注】【知识点】SAS

9. 如图，四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $CE \perp AB$ ， $\triangle BDC$ 为等腰直角三角形， $\angle BDC = 90^\circ$ ， $BD = CD$ ， CE 与 BD 交于 F ，连 AF ， DM 平分 $\angle BDC$ ，连接 DM 交 CE 于 N ，请说明：



(1) $\triangle ABD \cong \triangle NCD$.

(2) $CF = AB + AF$.

【答案】(1) 证明见解析．

(2) 证明见解析．

【解析】(1) $\because CE \perp AB$,

$$\therefore \angle BEF = \angle CDF = 90^\circ,$$

$$\because \angle ABD + \angle EFB = 90^\circ, \angle DCF + \angle DFC = 90^\circ, \angle EFB = \angle DFC,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle DCN,$$

$$\because DB = DC, \angle BDC = 90^\circ, BM = CM,$$

$$\therefore \angle MDB = \angle MDC = \angle DBC = 45^\circ,$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle DBC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle CDN,$$

在 $\triangle ADB$ 和 $\triangle NDC$ 中,

$$\begin{cases} \angle ADB = \angle CDN \\ \angle ABD = \angle DCN, \\ BD = DC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle NCD.$$

$$(2) \because \triangle ABD \cong \triangle NCD,$$

$$\therefore AD = DN, AB = CN,$$

在 $\triangle FDA$ 和 $\triangle FDN$ 中,

$$\begin{cases} DF = DF \\ \angle ADF = \angle FDN, \\ DA = DN \end{cases}$$

$$\therefore \triangle FDA \cong \triangle FDN,$$

$$\therefore AF = FN,$$

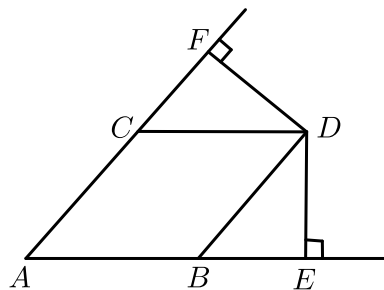
$$\therefore CF = CN + FN = AB + AF.$$

【标注】【知识点】多解或多种判定混合

三、基本辅助线

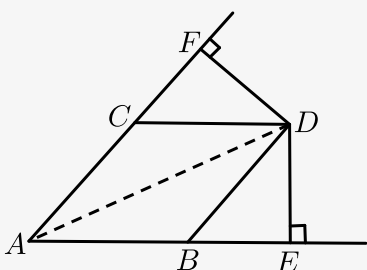
栗子4

10. 如图, 点 B 、 C 分别在 $\angle A$ 的两边上, 点 D 是 $\angle A$ 内一点, $DE \perp AB$, $DF \perp AC$, 垂足分别为 E 、 F , 且 $AB = AC$, $DE = DF$, 求证: $BD = CD$.



【答案】证明见解析 .

【解析】连接 AD ,



$\because DE \perp AB, DF \perp AC, DE = DF,$

$\therefore \angle BAD = \angle CAD,$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中 ,

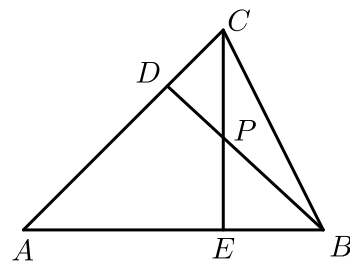
$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAD, \\ AD = AD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD, (SAS),$

$\therefore BD = CD.$

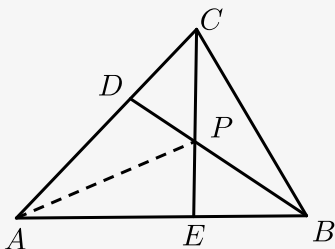
【标注】【知识点】SAS

11. 已知：如图， $\triangle ABC$ 的两条高 BD 、 CE 相交于点 P ，且 $PD = PE$ ，求证： $AC = AB$.



【答案】证明见解析 .

【解析】连接 AP ,



在 $\text{Rt}\triangle APE$ 和 $\text{Rt}\triangle APD$ 中

$$\begin{cases} AP = AP \\ PD = PE \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt}\triangle APE \cong \text{Rt}\triangle APD$,

$\therefore \angle BAP = \angle CAP$, $\angle APE = \angle APD$,

$\therefore \angle EPB = \angle DPC$,

$\therefore \angle EPB + \angle APE = \angle DPC + \angle APD$, 即 $\angle APB = \angle APC$,

在 $\text{Rt}\triangle APB$ 与 $\text{Rt}\triangle APC$ 中

$$\begin{cases} \angle BAP = \angle CAP \\ AP = AP \\ \angle APB = \angle APC \end{cases}$$

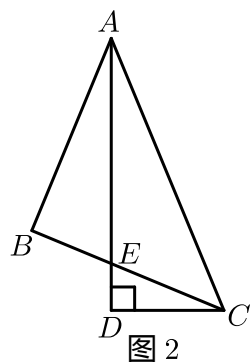
$\therefore \triangle APB \cong \triangle APC$,

$\therefore AC = AB$.

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

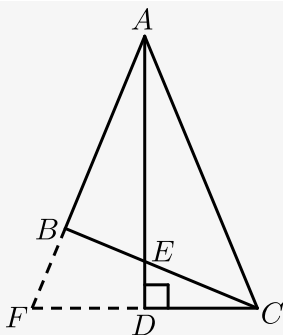
栗子5

12. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 45^\circ$, $AB = BC$, AD 平分 $\angle BAC$, $AD \perp CD$, 垂足为 D , AD 与 BC 交于点 E . 求证: $AE = 2CD$.



【答案】证明见解析

【解析】延长 CD 交 AB 的延长线于点 F 点,



$\because \angle BAC = 45^\circ, AB = BC,$
 $\therefore \angle BCA = 45^\circ, \angle ABC = 90^\circ,$
 $\because AD \perp CD, \therefore \angle ADC = 90^\circ,$
 $\therefore \angle AEB = \angle CED, \therefore \angle BAE = \angle ECD,$
 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CBF$ 中,

$$\begin{cases} \angle ABC = \angle CBF \\ AB = CB \\ \angle BAE = \angle BCF \end{cases},$$

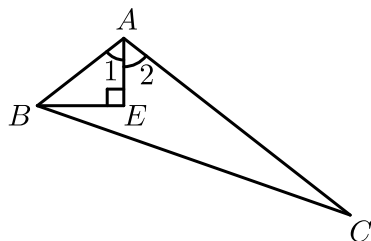
 $\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBF (ASA),$
 $\therefore AE = CF,$
 $\because AD$ 平分 $\angle FAC, AD \perp CF,$
 在 $\triangle AFD$ 和 $\triangle ACD$ 中,

$$\begin{cases} \angle FAD = \angle CAD \\ AD = AD \\ \angle ADF = \angle ADC \end{cases},$$

 $\therefore \triangle AFD \cong \triangle ACD (ASA),$
 $\therefore FD = CD = \frac{1}{2} CF,$
 $\therefore AE = 2CD.$

【标注】【知识点】全等三角形之二次全等

13. 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 3\angle C, \angle 1 = \angle 2, BE \perp AE$. 求证： $AC - AB = 2BE$.



【答案】证明见解析.

【解析】延长 BE 交 AC 于 M .

$\because AE \perp BE,$

$$\therefore \angle AEB = \angle AEM = 90^\circ .$$

在 $\triangle AEB$ 和 $\triangle AEM$ 中，

$$\begin{cases} \angle AEB = \angle AEM \\ AE = AE \\ \angle 1 = \angle 2 \end{cases} ,$$

$$\therefore \triangle AEB \cong \triangle AEM ,$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 4 , AB = AM , BE = EM ,$$

$$\therefore AC - AB = AC - AM = MC , BM = 2BE .$$

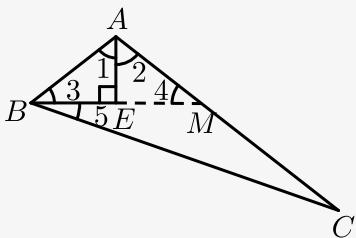
$$\text{又} \because \angle 3 = \angle 4 = \angle 5 + \angle C , \angle ABC = \angle 3 + \angle 5 = 3\angle C ,$$

$$\therefore \angle 5 + \angle C + \angle 5 = 3\angle C ,$$

$$\therefore \angle 5 = \angle C ,$$

$$\therefore MB = MC ,$$

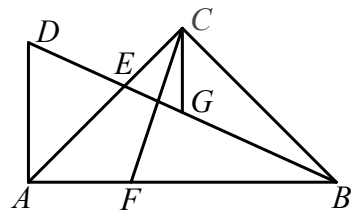
$$\therefore AC - AB = 2BE .$$



【标注】【知识点】角分线有关的辅助线

独步天下2

14. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ， E 为 AC 边的中点，过点 A 作 $AD \perp AB$ 交 BE 的延长线于点 D ， CG 平分 $\angle ACB$ 交 BD 于点 G ，在 AB 边上取一点 F ，使 $\angle ACF = \angle CBG$ ，连接 CF 。



- (1) 求证： $AF = CG$.
 (2) 试探究线段 CF 与 DE 长的数量关系，并对结论给予证明 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) $CF = 2DE$ ，证明见解析 .

【解析】 (1) $\because \angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ，
 $\therefore \triangle ABC$ 是等腰直角三角形，

即 $\angle CAF = \angle CBA = 45^\circ$,

$\because CG$ 平分 $\angle ACB$,

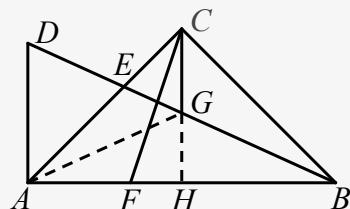
$\therefore \angle BCG = \angle ACG = 45^\circ$,

$\therefore \angle ACF = \angle CBG$,

$\therefore \triangle ACF \cong \triangle CBG$,

故 $AF = CG$.

(2) 如图: 连接 AG , 延长 CG 交 AB 于点 H ,



$\because CG$ 平分 $\angle ACB$,

$\therefore \triangle ACG \cong \triangle BCG$,

故 $AG = BG = CF$,

$\because AD \perp AB$,

$\therefore \angle DAE = \angle GCE = 45^\circ$,

$\because E$ 为 AC 边的中点,

$\therefore AE = CE$,

$\therefore \angle DEA = \angle GEC$,

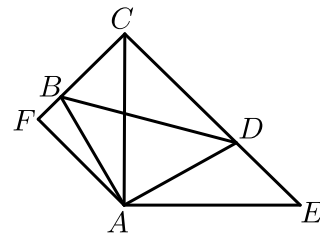
$\therefore \triangle DEA \cong \triangle GEC$,

$\therefore DE = GE = \frac{1}{2} DG$,

故 $CF = 2DE$.

【标注】【知识点】多解或多种判定混合

15. 如图, $\angle BAD = \angle CAE = 90^\circ$, $AB = AD$, $AE = AC$, $AF \perp CB$, 垂足为 F .



(1) 求证: $\triangle ABC \cong \triangle ADE$.

(2) 求 $\angle FAE$ 的度数.

(3) 求证: $CD = 2BF + DE$.

【答案】(1) 证明见解析 .

(2) 135° .

(3) 证明见解析 .

【解析】(1) $\because \angle BAD = \angle CAE = 90^\circ$,

$$\therefore \angle BAC + \angle CAD = 90^\circ , \angle CAD + \angle DAE = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle DAE ,$$

在 $\triangle BAC$ 和 $\triangle DAE$ 中 ,

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle BAC = \angle DAE , \\ AC = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BAC \cong \triangle DAE (\text{SAS}) .$$

(2) $\because \angle CAE = 90^\circ$, $AC = AE$,

$$\therefore \angle E = 45^\circ ,$$

由(1)知 $\triangle BAC \cong \triangle DAE$,

$$\therefore \angle BCA = \angle E = 45^\circ ,$$

$$\because AF \perp BC ,$$

$$\therefore \angle CFA = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle CAF = 45^\circ$$

$$\therefore \angle FAE = \angle FAC + \angle CAE = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ .$$

(3) 延长 BF 到 G , 使得 $FG = FB$,

$$\because AF \perp BG ,$$

$$\therefore \angle AFG = \angle AFB = 90^\circ ,$$

在 $\triangle AFB$ 和 $\triangle AFG$ 中 ,

$$\begin{cases} BF = GF \\ \angle AFB = \angle AFG , \\ AF = AF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AFB \cong \triangle AFG (\text{SAS}) ,$$

$$\therefore AB = AG , \angle ABF = \angle G ,$$

$$\because \triangle BAC \cong \triangle DAE ,$$

$$\therefore AB = AD , \angle CBA = \angle EDA , CB = ED ,$$

$$\therefore AG = AD , \angle ABF = \angle CDA ,$$

$$\therefore \angle G = \angle CDA ,$$

$$\therefore \angle GCA = \angle DCA = 45^\circ ,$$

在 $\triangle CGA$ 和 $\triangle CDA$ 中 ,

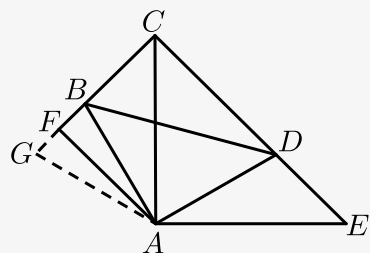
$$\begin{cases} \angle GCA = \angle DCA \\ \angle CGA = \angle CDA , \\ AG = AD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle CGA \cong \triangle CDA (\text{AAS}) ,$$

$$\therefore CG = CD ,$$

$$\therefore CG = CB + BF + FG = CB + 2BF = DE + 2BF ,$$

$$\therefore CD = 2BF + DE .$$



【标注】【知识点】全等三角形之二次全等